Soluzioni del compito di Analisi III per Ingegneria Online (Gestionale e Informatica) 21–12–06

• Sia data la seguente funzione $f(x,y)=3+4xy-x^3-4y^2$. Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera

R1 La funzione ha un minimo relativo ed un punto di sella R2 La funzione ha un solo punto critico ed è un minimo R3* La funzione ha un punto di massimo e un punto di sella R4 La funzione ha solo due punti critici e sono due punti di massimo R5 La funzione ha un solo punto critico ed è un minimo R6 tutti i punti critici sono massimi R7 nessuna delle altre

L'esercizio è chiaro ed infatti tutti tranne uno hanno azzeccato la risposta

• Si calcoli il volume compreso fra i due parabolidi $z=x^2+y^2+2x+2$ e $z=-x^2-y^2-2x+1$ (si consiglia di "semplificare" adeguatamente le equazioni dei due paraboloidi prima di effettuare qualsiasi conto)

R1 $\frac{\pi}{3}$ R2 $\frac{2}{3}\pi$ R3 π R4 $\frac{3}{2}\pi$ R5 2π R6* $\frac{\pi}{4}$ R7 nessuna delle altre

Si trattava delle due superfici $z=x^2+y^2$, $z=1-x^2-y^2$ opportunamente traslate e precisamente $z-1=(x+1)^2+y^2$, $\quad z-1=1-(x+1)^2-y^2$

La proiezione sul piano (x,y) dell'intersezione delle due superfici è data dalla circonferenza $2x^2+2y^2=1$ (nei quattro casi si ha $2(x+1)^2+2y^2=1$)

Il volume è dato da $\int\int_{2x^2+2y^2\leq 1} dxdy \int_{x^2+y^2}^{1-x^2-y^2} dz = \int\int_{2x^2+2y^2\leq 1} dxdy(1-2x^2-2y^2)$ e passando a coordinate polari nel piano $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos t$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin t$, si ottiene $\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho(1-\rho^2)dt = \pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\frac{\pi}{4}$

• Si calcoli l'area della superficie definita da $z=x^2+y^2+2x+2$ e $z<-x^2-y^2-2x+1$ (si consiglia di "semplificare" adeguatamente le equazioni dei due paraboloidi prima di effettuare qualsiasi conto)

R1 $\frac{\pi}{4}(3^{3/2}+1)$ R2* $\frac{\pi}{6}(3^{3/2}-1)$ R3 $\frac{\pi}{2}(3^{3/2}-1)$ R4 $\pi(3^{3/2}-1)$ R5 $\frac{\pi}{6}(3^{3/2}+1)$ R6 $\frac{2}{3}\pi(3^{3/2}-1)$ R7 nessuna delle altre

L'area è data dalla formula

$$\int\int_{2x^2+y^2\leq 1} dxdy\sqrt{1+4x^2+4y^2} = \int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi} dt\frac{1}{2}\rho\sqrt{1+2\rho^2} = \pi(1+2\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1\frac{1}{6} = \frac{\pi}{6}(3^{3/2}-1)$$

• Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{V}(\underline{x})=-2y\underline{i}+2(x+1)\underline{j}+z(x+1)y\underline{k}$ verso l'esterno della superficie laterale definita da $z=x^2+y^2+2x+2$ e $z<-x^2-y^2-2x+1$ (si consiglia di "semplificare" adeguatamente le equazioni dei due paraboloidi prima di effettuare qualsiasi conto)

R1 π R2 3π R3 π R4* 0 R5 2π R6 $\frac{\pi}{4}$ R7 nessuna delle altre

Traslando opportunamente la x oppure la y e la z, si deve integrare sulla superficie $z=x^2+y^2$ il campo vettoriale $\underline{V}(\underline{x})=-2y\underline{i}+2x\underline{j}+zxy\underline{k}$ con la condizione $2x^2+2y^2\leq 1$. La normale che punta verso l'esterno della superficie è data da $(2x,2y,-1)$ e l'integrale è pari a $\int\int_{2x^2+y^2\leq 1}(-4xy+4xy-xy(x^2+y^2)$ e l'integrale è zero in quanto, passando a coordinate polari nel piano, xy diventa $\sin t\cos t$ che va integrato fra 0 e 2π.

Si poteva usare il Teorema di Gauss ed il risultato era chiaramente lo stesso. Si doveva osservare che la curva intersezione delle due superfici giaceva su di piano $z=z_0$ con z_0 dipendente dal singolo problema. Nel caso specifico in cui si stanno faceno i conti si ha $z=\frac{1}{2}$. Detta V la regione $x^2+y^2\leq z\leq\frac{1}{2}$, il teorema di Gauss ci dà $\int\int\int_V (div\underline{V})dxdydz = \int\int_{z=x^2+y^2;z\leq 1/2} d\sigma(\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_e) + \int\int_{x^2+y^2\leq 1/2;z=1/2} d\sigma(\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_e)$ (ogni normale è esterna alla supeficie da cui scaturisce).

$\int\int\int_V (div\underline{V})dxdydz = \int\int_{x^2+y^2\leq 1/2} dxdy\int_{x^2+y^2}^{1/2} dzxy = \int\int_{x^2+y^2\leq 1/2} dxdy\, xy(\frac{1}{2}-x^2-y^2)=0$ in quanto bisogna integrare xy su di un cerchio e ciò fà zero.

Tenendo conto che la normale al piano $z=\frac{1}{2}$ è $(0,0,1)$, si ha

$\int\int_{x^2+y^2\le 1/2;z=1/2} d\sigma(\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_e) = \int\int_{x^2+y^2\le 1/2;z=1/2} dxdy\, zxy = \int\int_{x^2+y^2\le 1/2;z=1/2} dxdy\, \frac{1}{2}xy = 0$ per le stesse ragioni.

• Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva il cui sostegno è dato dall'insieme $z = x^2+y^2+2x+2$ e $z=-x^2-y^2-2x+1$. La curva è percorsa in modo che la sua proiezione sul piano (x,y) è percorsa in senso antiorario. Inoltre $\omega = (\frac{1}{3}x^3+x^2+x+\frac{1}{3}-2xy^2-2y^2)dy-(xy+y)dz$

Si consiglia di applicare il Teorema di Stokes e di "semplificare" adeguatamente le equazioni dei due paraboloidi prima di effettuare qualsiasi conto)

R1* $-\frac{\pi}{16}$ R2 $-\frac{2}{9}\pi$ R3 $-\pi$ R4 $\frac{3}{5}\pi$ R5 2π R6 $\frac{\pi}{12}$ R7 nessuna delle altre

Si consigliava di usare il Teorema di Stokes ma non era certamente obbligatorio. Volendo seguire il consiglio si può scrivere $\int_\gamma \omega = \int\int_{x^2+y^2\le 1/2} d\sigma(\underline{rotF},\underline{n}_e)$ dove $\underline{F}$ è il rotore del campo vettoriale $(0,\frac{1}{3}x^3-2xy^2,-xy)$. Per poter procedere con i calcoli relativi alle superfici già usate ($z=x^2+y^2$ e $z=1-x^2-y^2$) si deve supporre che lo studente abbia riconosciuto che le forme differenziali dei vari esercizi erano date dalla traslazione opportuna di quella data.
Per questa ragione procediamo nella risoluzione. La normale al piano è $(0,0,1)$

Il rotore è dato dal vettore $(-1-x,y,(x+1)^2-2y^2)$. La superficie è il piano $z=z_0$ opportuno e quindi l'integrale è $\int\int_{(x+1)^2+y^2\le 1/2} dx\,dy\,((x+1)^2-2y^2) = -\frac{\pi}{16}$

• Si valuti l'integrale doppio della funzione $f(x,y)=3(x^2+y^2)$ esteso all'insieme $S=\{(x,y)\colon |x|-1\le |y|\le \frac{1}{2}|x|\}$

R1 2 R2 $\frac{1}{3}$ R3 3 R4 9 R5* 8 R6 12 R7 nessuna delle altre

Il dominio è simmetrico rispetto a ciascuno dei due assi E LA FUNZIONE PURE per cui si ha $I = 12\int_0^1 dy\int_{2y}^{y+1}(x^2+y^2)dx = 8$

• Usando il teorema delle funzioni implicite si trovi il piano tangente $z=ax+by+c$ alla funzione definita implicitamente dalla relazione $x^2z+x-2z^{\ln(zy)}=0$ nel punto $(1,e,1)$

R1 $z=2-x-y+e$ R2* $z=3x-3+e$ R3 $z=2-x+x-e$ R4 $z=x+y-2$ R5 $z=x-1$ R6 $z=-y+e$ R7 nessuna delle altre

La soluzione è ben nota dal momento che molti studenti hanno azzeccato la risposta.

• Si calcoli l'integrale doppio $\int\int_D 3xydxdy$ dove D è la regione racchiusa dalle rette $x=1$, $x=-1$, $y=x-4$, $y=4|x|$

R1* 8 R2 -2 R3 $\frac{4}{5}$ R4 -15 R5 $\frac{10}{3}$ R6 1 R7 nessuna delle altre

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{x-4}^{4|x|}3xy = 8$$

• Sul retro del foglio si calcoli esplicitamente la derivata direzionale in $(0,0)$ della funzione che vale $\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e 1 se $(x,y)=(0,0)$. La direzione è data dal vettore (v_1,v_2) con $v_1^2+v_2^2=1$. Inoltre si dimostri se la funzione è : 1) continua nel punto $(0,0)$ 2) differenziabile in $(0,0)$

la derivata direzionale è $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(tv_1,tv_2)-f(0,0)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\frac{\sin t^2}{t^2}-1) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{\sin t^2-t^2}{t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2+o(t^6)-t^2}{t^3} = 0$ per cui la derivata vale zero qualunque sia la direzione (v_1,v_2)

Continuità . Passando a coordinate polari si ha $\lim_{\rho\to 0} \frac{\sin\rho^2}{\rho^2} - 1 = 0$ che è certamente vero e quindi è continua.

Differenziabilità . Deve essere $\lim_{\|\underline{h}\|\to \underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(h_1,h_2) - f(0,0) - \underline{\partial} f(0,0)\cdot \underline{h}) = 0$ e nel caso in questione si ha $\lim_{\|\underline{h}\|\to \underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|} \frac{\sin(h_1^2+h_2^2) - h_1^2 - h_2^2}{h_1^2+h_2^2}$ e passando a coordinate il limite vale zero.

• Si dica quanto vale $f_y(1,1)$ dove $f(x,y) = 2\frac{x^{xy}}{x^2+y^2}$

R1 0 R2* -1 R3 2 R4 4 R5 1 R6 -2 R7 nessuna delle altre

La soluzione è ovvia e molti studenti hanno dato la risposta giusta